

Точность восстановления потенциального поля при решении

задачи Неймана

В. И. Абраменко

The Accuracy of Potential Field Restoration

Using Neuman Problem

V. I. Abramenko

Abstract

The accuracy of potential field restoration using the boundary Neumann problem for the Laplace equation has been studied. The restored field coincides well with the true one provided there are no sources of perturbation around the area of calculation in the distance of the order of the area itself. The disbalance of the magnetic fluxes is negligible. The true potential field significantly differs from the restored one if there exist some misaccounted sources of the field in the vicinity of the area. The error of the field restoration depends upon the distance between the opposite charges in the group of perturbation, on the distance between the group and the boundary of the area and on the value of the charges.

При исследовании процессов в активных областях на Солнце часто применяется метод восстановления в потенциальном приближении магнитного поля в хромосфере и короне по данным наблюдений на уровне фотосферы. Сравнение на уровне фотосферы наблюдаемой структуры магнитного поля с потенциальной оказывается весьма полезным при изучении токовых систем активной области [1]. Для проведения таких исследований важно, чтобы точность в определении потенциального поля не уступала точности его измерений на магнитографе.

Вычисление потенциальной структуры поля связано с решением краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа. В литературе предложены различные способы расчетов потенциальных полей. Это разложения по собственным функциям и различные методы прямого интегрирования [2,3]. Очень мало внимания уделяется выяснению точности расчета потенциального поля.

Здесь проведено изучение ошибок, возникающих при решении краевой задачи Неймана одним из методов прямого интегрирования [4].

1. Математическая постановка задачи

Измерения H_z -компоненты магнитного поля в активной области на Солнце относятся к некоторому уровню в фотосфере. Размеры площадки, на которой измерено H_z , как правило, малы по сравнению с радиусом Солнца, поэтому кривизной ее можно пренебречь.

Пусть оси x, y лежат на уровне наблюдений (в плоскости Σ), ось направлена по внешней нормали \vec{n} к поверхности Солнца.

Для потенциального поля

$$\vec{H} = -\nabla u \quad (1)$$

$$\Delta u = 0, \quad (2)$$

где u — некоторая скалярная функция координат.

Нужно подобрать потенциал u так, чтобы вертикальная составляющая потенциального поля в каждой точке площадки совпадала с наблюдаемой H_z -компонентой поля. Это достигается решением краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа (2) в области $z > 0$ при граничном условии

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Sigma} = -H_z(x, y). \quad (3)$$

Необходимым и достаточным условием существования и единственности решения (при естественном ограничении на функцию H_z : $|H_z| \rightarrow 0$ быстрее, чем $1/r$ при $r \rightarrow \infty$) является равенство нулю интеграла [4]:

$$\iint_{\Sigma} H_z(x, y) dx dy = 0. \quad (4)$$

Решение полностью определяется граничным условием и может быть представлено в виде потенциала простого слоя [5]

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_z(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} dx' dy', \quad (x', y') \in \Sigma, \quad (5)$$

или, введя обозначение для функции Грина, имеем

$$u(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, z, x', y') \cdot H_z(x', y') dx' dy'. \quad (6)$$

Зная потенциал u , мы на основании выражения (1) можем определить все компоненты потенциального поля.

2. Погрешности при численном решении задачи

При численном решении задачи появляются два основных источника ошибок [5]. Во-первых, распределение H_z -компоненты поля в реальных условиях известно лишь на некоторой ограниченной площадке Σ_0 . С заменой бесконечной области интегрирования Σ на конечную площадку Σ_0 возникает ошибка δ_1 ,

$$\delta_1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} G \cdot H_z ds - \iint_{\Sigma_0} G \cdot H_z ds. \quad (7)$$

Это связано с нарушением условия (4). Реально в некоторых случаях разбаланс магнитных потоков в активных областях может быть довольно значительный [5].

Во-вторых, вычисление потенциала по формуле (6) требует замены интеграла суммой

$$\delta_2 = \iint_{\Sigma_0} G \cdot H_z ds - \sum_i \sum_j G_{ij} H_{z ij} \Delta S_{ij}. \quad (8)$$

В задачах подобного рода ошибка метода δ_2 является основной [4].

В [4] предложены некоторые способы уменьшения ошибок δ_1 и δ_2 и получено выражение для вычисления потенциала

$$u(x, y, z) = \sum_i \sum_j \tilde{G}_{ij}(x, y, z, x'_i, y'_j) \cdot H_z(x'_i, y'_j). \quad (9)$$

Здесь \tilde{G}_{ij} - сглаженная по вычислительной ячейке функция Грина с поправкой, компенсирующей влияние δ_2 .

Для того чтобы проверить, насколько точно восстанавливается потенциальное поле при решении задачи Неймана по формуле (9), были проведены численные эксперименты, суть которых заключается в следующем.

Расчеты потенциального поля велись для различных систем единичных зарядов, расположенных на некоторой глубине относительно плоскости Σ . Все расчеты поля относились к плоскости $z=0$ (Σ). Для системы

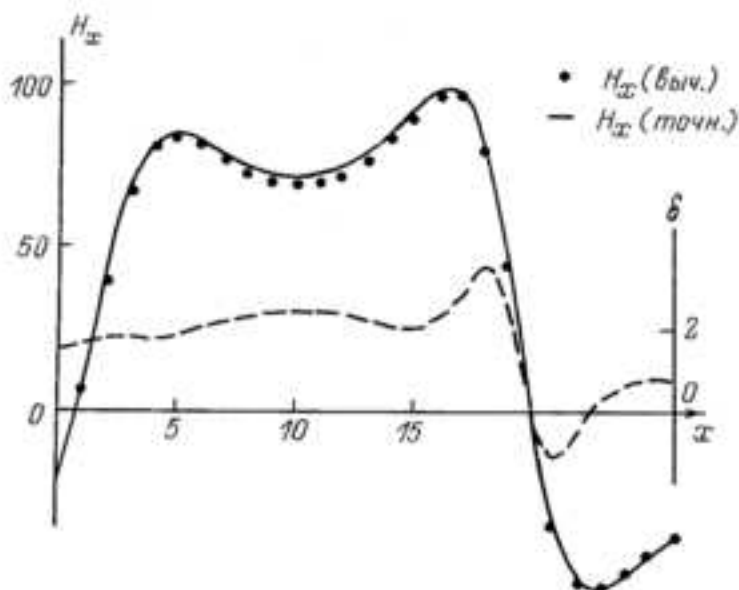


Рис. I

единичных зарядов по формулам для потенциала точечных зарядов вычислялись H_x, H_y, H_z -компоненты поля. Затем по этой же H_x -компоненте на основании решения задачи Неймана вычислялась по формуле (9) структура потенциала u на площадке Σ_0 . По потенциалу u определялись H_x, H_y -компоненты поперечного поля, которые сравнивались с поперечными компонентами, полученными по формулам для потенциала точечных зарядов. Результаты вычислений в частности для H_x -компоненты поля системы из шести единичных зарядов (три положительных, три отрицательных) представлены на рис. I (разрез вдоль линии, проходящей через максимум поперечного поля). Сплошная линия - точное значение функции $H_x(x)$ (в условных единицах), вычисленное по формулам потенциала точечных зарядов. Полученные на основании решения задачи Неймана значения H_x -компоненты поля нанесены точками. Штриховой линией на рис. I приведен график суммарной абсолютной ошибки $\delta = H_x(\text{точн.}) - H_x(\text{выч.})$ в тех же условных единицах (шкала справа). Среднеквадратичная абсолютная ошибка по Σ_0 в вычислении H_x (H_y) равна 2% от максимального значения H_x (H_y). Точность метода при максимальных поперечных полях в активной области порядка 2000 Гс составляет 40 Гс, что сравнимо с точностью измерений поля на магнитографе [6].

Для той же системы из шести единичных зарядов на рис. 2 приведена сводная карта азимутов вектора поперечного поля I) для поля, вычислен -

ного по формулам для потенциала точечных зарядов; 2) для поля, найденного методом решения задачи Неймана. Из рисунка видно, что значения азимутов, полученные обоими методами, в основном совпадают. Однако имеются и

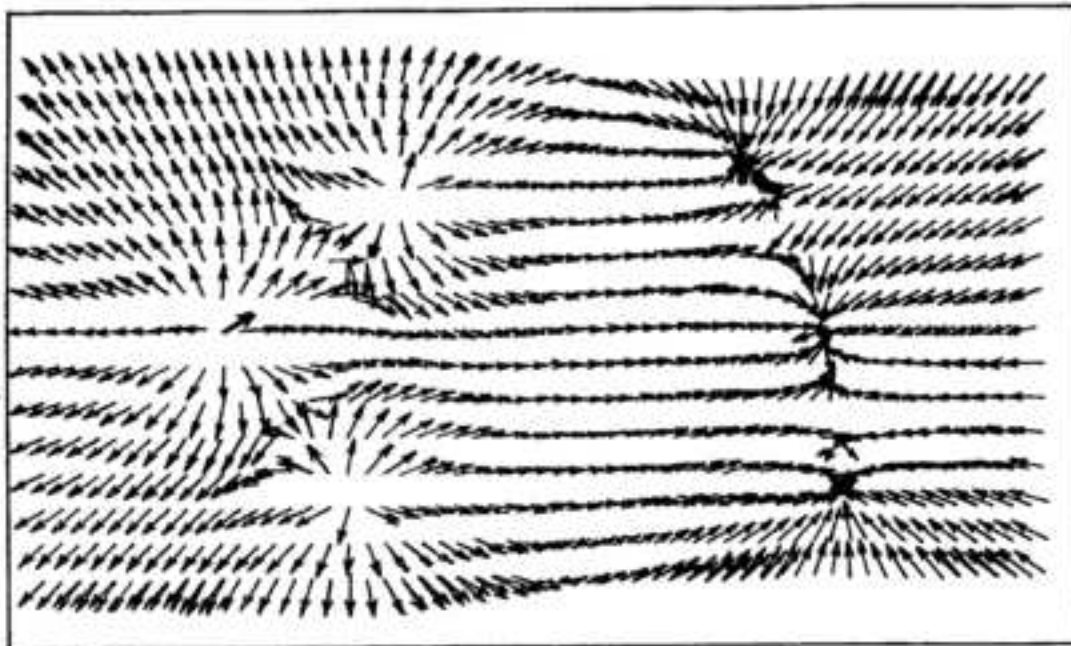


Рис.2

различия 1) на границе площадки; 2) в отдельных местах внутри площадки, где поле очень слабое и одна из его компонент близка к нулю (это участки сильных градиентов поля); 3) в непосредственной близости от зарядов. Различия в указанных местах доходят до $10 - 12^\circ$. В остальной, подавляющей по площади, части Σ_0 точность восстановления направления поля составляет $1-3^\circ$. При измерениях направления вектора поперечного поля достигается точность около $\pm 5^\circ$ [7].

Разбаланс магнитных потоков моделирован системой из семи зарядов (трех положительных и четырех отрицательных). Четвертый положительный заряд находился на бесконечности. Из расчетов следовало, что влияние разбаланса магнитных потоков на точность восстановления поля несущественно. Так что нарушение условия (4) не вносит ощутимых искажений в восстановление поля, если возмущающие источники поля находятся на бесконечно больших расстояниях от границы Σ_0 .

Запись поля лишь части активной области эквивалентна случаю расположения возмущающих зарядов на конечном расстоянии от границы площадки Σ_0 . Для того чтобы промоделировать этот случай, добавим к системе из шести зарядов (рис.2) возмущающую группу из двух единичных зарядов противоположных знаков, расположенных на некотором расстоянии от границы Σ_0 (вблизи верхней границы на рис.3). Различия в ориентации полей довольно значительные. Они зависят от трех параметров: 1) близости возмущающей группы к границе Σ_0 - расстояние d , 2) расстояния между разноименными зарядами в возмущающей группе - расстояние h , 3) величины зарядов. При большом расстоянии между разноименными зарядами для системы зарядов рис. 3 ($d = 3h$) максимальные расхождения в азимутах вблизи верхней грани-

цы Σ_0 достигают 30° , вблизи зарядов и между ними - 20° , $\delta_{max} \approx 14\%$ от N_{lmax} . При сближении разноименных зарядов возмущающей группы различия между истинным и восстановленным полем уменьшаются и при $d = 0.5h$ достигают таких же значений, как для системы из шести зарядов без возмущающей группы

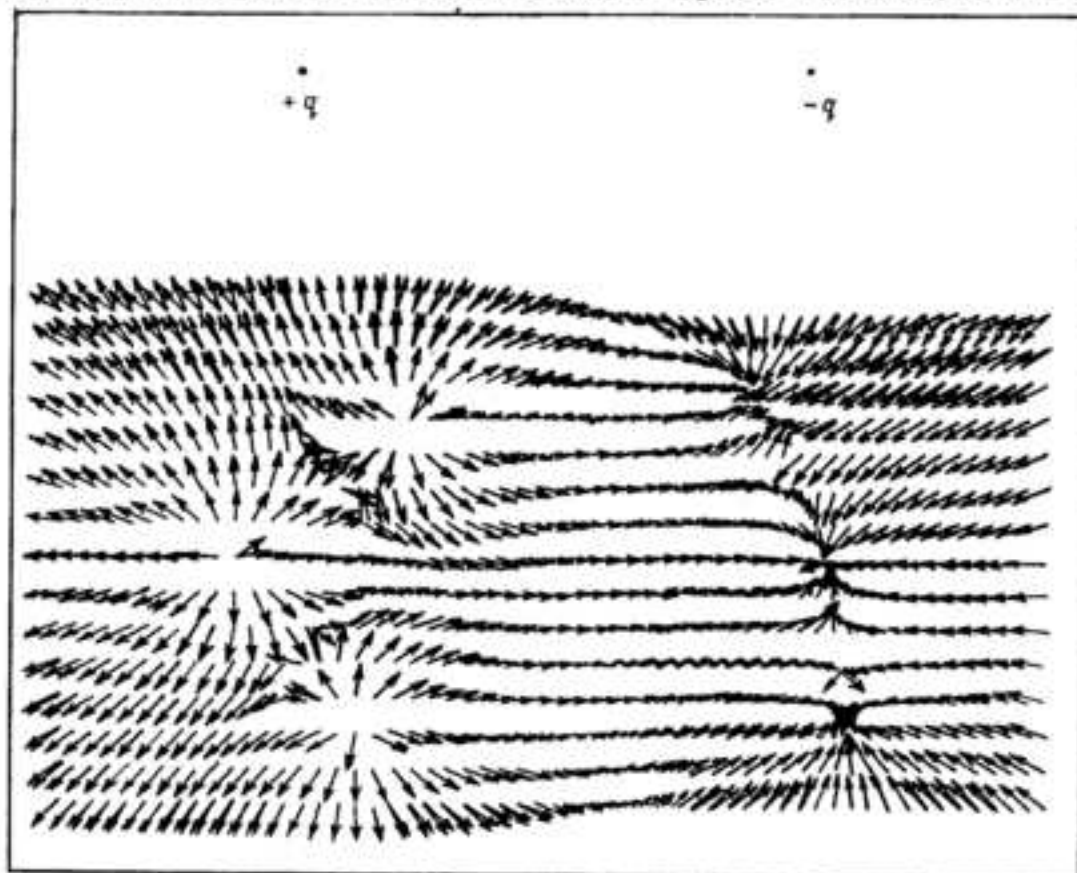


Рис. 3

(рис.2). С удалением возмущающей группы от границы Σ_0 влияние ее на восстановленное поле внутри площадки Σ_0 постепенно ослабевает. На расстоянии порядка $l + 1.5l$ (l - характерная ширина площадки) она уже не чувствуется. Влияние группы из одноименных зарядов не зависит от расстояния между зарядами.

Такой характер влияния возмущающих зарядов на поле внутри площадки Σ_0 обусловлен следующими причинами. Когда расстояние между разноименными зарядами в возмущающей группе больше, чем расстояние от каждого из них до ближайших зарядов на Σ_0 , то большая часть силовых линий возмущающих зарядов замыкается на Σ_0 , между собой они взаимодействуют слабо. Влияние возмущающей группы при этом максимальное. По мере сближения разноименных зарядов в возмущающей группе взаимодействия между ними усиливается, все большая часть их силовых линий замыкается на них самих, и влияние их на поле площадки Σ_0 ослабевает. Этот процесс имеет место и при удалении группы разноименных зарядов от границ Σ_0 . По мере удаления возмущающей группы напряженность поля между ней и зарядами площадки Σ_0 быстро падает. На расстояниях порядка $1,5l$ влияние ее на поле площадки Σ_0 не проявляется, даже если возмущающая группа униполярная.

3. Выводы

Восстановленное на основании решения задачи Неймана потенциальное поле достаточно хорошо совпадает с истинным полем, если вокруг площадки на расстоянии порядка ее характерного размера нет возмущающих источников поля. В этом случае разбаланс магнитных потоков играет очень незначительную роль. Среднеквадратичная абсолютная погрешность восстановления модуля поперечного поля составит 2% от максимального значения поля. Точность определения азимута поля в основном $\pm 3^\circ$.

Истинное потенциальное поле заметно отличается от восстановленного методом решения задачи Неймана в случае, когда вблизи площадки на расстоянии, сравнимом с ее характерными размерами, имеются возмущающие источники поля. Различия в восстановлении поля зависят от расстояния между разноименными зарядами в возмущающей группе, от близости группы к границам площадки и от величины зарядов. При уменьшении расстояния между разноименными зарядами, а также по мере удаления возмущающей группы от границы площадки влияние ее ослабевает.

Обычно за пределами реальной магнитограммы магнитной области остаются участки только слабых полей, разбаланс магнитных потоков связан с замыканием полей активной области с полями другой области [8] или с полями в невозмущенной атмосфере [9]. Поэтому в реальных случаях достаточно сильные поля (несколько сот гаусс) практически мало искажены неучтенными источниками поля. Так что восстановление поля активной области по данным наблюдений производится с довольно неплохой точностью.

Автор приносит благодарность С.И.Гопаску за обсуждение работы и ряд полезных замечаний.

Литература

1. Gopasyuk S.I., Kalman B., Romanov V.A. Changes in the Large-Scale Current System in the Course of the Evolution of an Active Region. - Publ. Debrecen Heliophys. Obs., 1983, vol. 5, p. 249-266.
2. Elwert G., Müller K., Thür L., Balz P. Computation of Inner Coronal Magnetic Fields from Longitudinal Field Components on a Spherical Photosphere. - Solar Phys., 1982, vol. 75, N 1/2, p. 205-227.
3. Волюнский Б.А., Бухман В.Е. Модели для решения краевых задач. - М.: Ф.-М., 1960, с. 391-401.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики. - М.: Наука, 1968, с. 382-390.
5. Иргашев Д.И. Некоторые особенности поля скоростей и магнитных полей в развитых активных областях. I. - Солн. данные, 1977, № 3, с. 92-100.
6. Степанов В.Е., Северный А.Б. Фотоэлектрический метод измерения величины и направления магнитного поля на поверхности Солнца. - Изв. КРАО, 1962, т. 28, с. 166-193.

7. Северный А.Б. Наблюдения поперечных и продольных магнитных полей, связанных с солнечными вспышками. - Изв. КраО, 1964, т. 31, с. 159-199.
8. Алтынцев А.Т., Банин В.Г., Гопаски С.И. и др. Активные области и вспышки. - В сб.: Исслед. по геомагн., аэрон. и физ. Солнца, М.: Наука, 1981, вып. 56, с. 39-56.
9. Гопаски С.И. Магнитные поля и движения в атмосфере Солнца. - Автореферат докторской диссертации, Л.: ГАО АН СССР, 1973. - 10 с.

Крымская астрофизическая
обсерватория АН СССР

Поступила в редакцию
5 марта 1986 г.

Особенности динамики протуберанца, наблюдавшегося 8 октября 1984 г.

В.И. Кулиджанишвили, Ю.В. Платов

Peculiarities of the Dynamics of the Prominence

Observed on October 8, 1984

V.I. Kulidzanishvili and Yu.V. Platov

Abstract

Simultaneous spectral and light filter observations of a quiescent prominence were carried out on October 8, 1984. The observations were made using the large coronagraph of the Georgian SSR Academy of Sciences Abastumani Astrophysical Observatory equipped with a special attachment on the western limb of the Sun. Resolution on the photographs is $2''$, on the best ones $1''$. $445 \text{ H}\alpha$ line profiles, belonging to 70 different details of the prominence were drawn. According to the obtained profiles radial velocity V_r , half-widths $\Delta\lambda$ and equivalent widths W were determined. The histograms of radial velocities has a considerable asymmetry and its maximum corresponds to the velocity equal to $\sim 7 \text{ km/sec}$. This indicates that there existed an oriented flow of matter, having a velocity component along the line of sight, without totally changing the structure of the formation. That is, prominences do not seem to be stationary, but they represent a formation in a relative dynamic equilibrium.

Исследование физических механизмов развития различных образований в атмосфере Солнца невозможно без тщательного анализа их динамических характеристик. В частности, это относится и к таким чрезвычайно разнообразным явлениям как протуберанцы. Исследованию динамики протуберанцев посвящено большое количество работ, но в их подавляющем большинстве анализ особенностей развития протуберанцев различных классов проводился по наблюдениям через светофильтры. Фильтровые данные не могут давать достаточно полного представления о процессах, происходящих в области развития протуберанцев. Спектральные же наблюдения позволяют получать более полную информацию о физических условиях. Однако, в отличие от фильтровых, они одномерны, т.е. данные относятся лишь к областям, попадаю-